**Kaya Han Taş**

**20183405003**

**UBT**

***YÖRÜNGE MEKANİĞİ FİNAL ÖDEVİ***

***SORU 1:*** *Güneş etrafında eliptik bir yörüngede dolanan cismin yörüngesinde en hızlı olduğu anda hızı 16.841475 km/sn, yörünge basıklığı 0.190744 ise cismin enberi uzaklığını, enöte uzaklığını, en yavaş olduğu noktada hızını, özkiriş (semi latus rectum) noktasındaki hızını, yörüngesinin yarı büyük eksen uzunluğunu ve dolanım periyodunu hesaplayın.*

***ÇÖZÜM:***

Öncelikle elimizde olan parametreleri ve değerleri irdelemeyle başlayabiliriz.

Soruda ilk olarak bize cismin yörüngesinde en hızlı olduğu anda hızı verilmiş. Bildiğimiz üzere bir cismin maksimum hıza ulaştığı zaman cismin enberi noktasında bulunduğu andır. Yani soruda bahsedilen cismin yörüngesinde en hızlı olduğu anda hızı ifadesi bize cismin o anda *enberi noktasında bulunduğunu* söylemektedir. Yani bu hızı enberi hızı olmak üzere aşağıdaki şekilde yazmak uygundur.

Fakat böyle bırakmak yeterli olmayacaktır. Enberi uzaklığı, Enöte uzaklığı ve Yarı büyük eksen uzunluğunu Astronomik Birim () cinsinden hesaplamak daha uygundur. Ayrıca birazdan yerine kullanacağımız sabit de ve cinslerinden verilmiştir. Bu nedenle bu hız değerini ’e çevirmemiz gerekmektedir. Önce ile arası ilişkiyi, ardından ile arası ilişkiyi yazmak faydalı olacaktır.

Bize değerini çevirebilmemiz için ’nin cinsinden değeri ve ’nin cinsinden değeri gereklidir. Basit bir orantı ile aşağıdaki değerleri elde ediyoruz.

Artık bu ilişkileri yazdığımıza göre değerini cinsinden yazabilmek için işlemimizi yapabiliriz.

Bu ifadeyi daha düzenli bir hale getiriyoruz.

Artık değerini bu işlemi yaparak cinsinden yazabiliriz.

Artık ifadesi diğer işlemlerde kullanılmaya birimsel olarak hazır bir hale gelmiştir.

Ayrıca bize eliptik yörüngenin basıklığı (eccentricity) verilmiş. Bunu direkt olarak aşağıdaki biçimde yazabiliriz.

Artık sırasıyla soruda bizden istenen parametrelerin değerlerini bulmaya başlayabiliriz.

***1. Yarı-büyük eksen uzunluğu (Semi-major axis) ():***

Burada bilmemiz gereken formül cismin enberi noktasında yani hızının tam maksimum olduğu noktadaki denklemidir. Bu formülü aşağıdaki şekilde yazabilmekteyiz.

Şimdi yazdığımız formülü ’ya göre düzenliyoruz.

Burada değeri *AB3 Gün-2 MGüneş-1* değerine eşittir. Bunu da açıkladıktan sonra formülümüzde bulunan ve değerleri zaten bize soruda verildiğinden dolayı ’yı hesaplayabiliriz. Şimdi değerleri formülde yerine yazıyoruz.

Buradan Yarı-büyük eksen uzunluğu elde edilir.

***2. Enberi uzaklığı (Perihelion distance) ():***

Enberi uzaklığını aşağıdaki formülle kolayca bulabiliriz.

Formülde bulunan bütün değerleri bildiğimizden dolayı ’yi rahatlıkla bulabiliriz. Şimdi formülde değerleri yerine yazıyoruz.

Buradan Enberi uzaklığını elde etmiş oluyoruz.

***3. Enöte uzaklığı (Aphelion distance) ():***

Enöte uzaklığını aşağıdaki formülle kolayca bulabiliriz.

Formülde bulunan bütün değerleri bildiğimizden dolayı ’yı rahatlıkla bulabiliriz. Şimdi formülde değerleri yerine yazıyoruz.

Buradan Enöte uzaklığını elde etmiş oluyoruz.

***4. Dolanım Periyotu (T):***

Dolanım periyodunu aşağıdaki formül ile bulabilmekteyiz.

Bu formülde parametresi değerini hesapladığımız semi-major axis (yarı-büyük eksen uzunluğu) olup buradan direkt olarak periyotu bulabiliriz. ’yı formülde yerine yazıyoruz.

Buradan dolanım periyotunu elde etmiş oluyoruz.

***5. En yavaş olduğu noktadaki hızı ():***

Bildiğimiz üzere cismin en yavaş olduğu nokta *cismin enöte noktasıdır*. Yani soruda bize cismin en yavaş olduğu noktadaki hızı sorulurken aslında cismin enöte noktasındaki hızı sorulmaktadır. Enöte hızı olmak üzere bu hızı aşağıdaki formül ile hesaplayabilmekteyiz.

Bu formülde bulunan parametrelerin değerlerini biliyoruz. Bu nedenle direkt olarak fonksiyona , ve değerlerini yazıyoruz. ()

Öncelikle bu ifadeyi hesaplamak kolaylık açısından uygundur.

Şimdi değerini bulabilmek için bu ifadenin karekökünü alıyoruz.

Buradan cismin en yavaş olduğu noktadaki hızını elde etmiş oluyoruz.

***6. Özkiriş (semi latus rectum) noktasındaki hızı ():***

Cismin özkiriş noktasındaki hızını aşağıdaki formülden direkt olarak bulabilmekteyiz.

Yine bu formülde bulunan bütün parametrelerin değerleri elimizde olduğundan direkt olarak bu değerleri yerine yazabiliriz.

Öncelikle bu ifadeyi hesaplamak kolaylık açısından uygundur.

Şimdi değerini bulabilmek için bu ifadenin karekökünü alıyoruz.

Buradan cismin özkiriş noktasındaki hızını elde etmiş oluyoruz.

***SORU 2:*** *Güneş'e en yakın olduğu noktada Güneş'ten uzaklığı 1.982706 AB, yörüngesinin eğimi 12°.991044 olan bir cismin birim kütle başına toplam enerjisi:*

1. *−5.544988×10−5 AB2/gün2 ise*
2. *0.0 AB2/gün2 ise*
3. *5.544988×10−5 AB2/gün2 ise*

*cismin yörüngesinin basıklığını, yarı büyük eksen uzunluğunu, yörüngesinde erişeceği en yüksek hızını ve sadece eliptik bir yörünge için, etkileşimde olabileceğini düşündüğünüz gezegenlere göre Tisserand parametresini hesaplayın ve sonuçlarınızı irdeleyin.*

***ÇÖZÜM:***

İlk olarak soruda bize verilen parametreleri inceleyip kısaca soruda verilenler ve istenenler hakkında kısa bir bilgilendirme yapmak iyi olacaktır.

Bize öncelikle Güneş’e en yakın olduğu noktada cismin uzaklığı verilmiş. Bilindiği üzere bu nokta aynı zamanda enberi noktasıdır ve ile gösterilir. Bu bilgiyi aşağıdaki biçimde yazabiliriz.

Ayrıca bize cismin yörüngesinin eğimi yani inclination değeri verilmiş. Verilen değeri aşağıdaki biçimde gösterip yazabiliriz.

Bu soruda ilk kez karşılaştığımız iki kavram bulunmakta; birim kütle başına toplam enerji ve Tisserand parametresi. İlk olarak birim kütle başına toplam enerji kavramı ile başlayıp sonrasında Tisserand parametresini açıklamayla başlayabiliriz.

Birim kütle başına toplam enerjiyi aşağıdaki formül ile ifade edebiliriz.

Bu terim özellikle yörünge tipini bulma açısından çok önemli bir yere sahiptir. Bu ilişkiyi kısaca aşağıdaki biçimde açıklayabilmekteyiz. Sorularda zaten çözümler yapılırken yine bu noktalara değinilecektir.

ise cismin bulunduğu yörünge *parabol* biçimindedir. ()

ise cismin bulunduğu yörünge *hiperbol* biçimindedir. ()

ise cismin bulunduğu yörünge *elips* biçimindedir. ()

Son olarak Tisserand parametresinden bahsetmemiz uygun olacaktır. Bu parametre cismimizin etkilendiği gezegenler ile alakalı olup etkileşimde olduğu gezegenlerin yörüngelerinin yarı-büyük eksenine bağlıdır. Formül olarak aşağıdaki biçimde gösterilebilmektedir. Formülde terimine yerleştirilecek olan eğim (inclination) değeri radyan olarak yerleştirilmelidir!!

Ayrıca ekstra bilgi olarak belirtmek gerekir ki, cismimizin yörünge elemanları herhangi bir gezegenle etkileşimleri sonucunda değişebilmektedir. Fakat Tisserand parametresi değişmemektedir, bu sayede cismimizin bir gezegen ile etkileşimleri sonucu yörünge elemanlarını bulabilme olanağı sağlanmaktadır.

Bu önbilgiler ışığında artık sorumuzun çözümüne geçebiliriz.

***a) Cismin birim kütle başına toplam enerjisi −5.544988×10−5 AB2/gün2 ise:***

***Yörünge cinsinin belirlenmesi:***

Soruda verildiği üzere birim kütle başına toplam enerji formülünü aşağıdaki biçimde yazabiliriz.

Buradan anlaşılacağı üzere değerimiz sıfırdan küçüktür. Yani bunu matematiksel olarak gösterirsek;

Önbilgide bahsettiğimiz üzere birim kütle başına toplam enerji’nin sıfırdan küçük olması cismin yörüngesinin ***eliptik bir yörünge*** olduğu anlamına gelmektedir. Yani bunu matematiksel olarak gösterirsek;

Ekstra bilgi olarak bahsedecek olursak birim kütle başına toplam enerji’nin sıfırdan küçük olması yani negatif bir değer olması demek sistemin kapalı bir sistem olması anlamına gelmektedir. Yani sistem enerjisini korumaktadır ve enerjiyi harcayan cisim ise yörüngesini korumaktadır.

***1.Yarı-büyük eksen uzunluğu (Semi-major axis) ():***

Öncelikle birim kütle başına toplam enerji formülünü yazabiliriz.

Burada değerinin *AB3 Gün-2 MGüneş-1* değerine eşit olduğunu biliyoruz. Bu ifadeyi soruda verilen değeri ile yerine yazıyoruz.

Bu ifadeyi biraz daha düzenliyoruz.

Buradan yarı-büyük eksen uzunluğunu buluyoruz.

***2. Yörüngenin basıklığı (Orbital eccentricity) ():***

Elimizde (yarı-büyük eksen) değeri ve (enberi uzaklığı) değeri bulunmaktadır. Bunu göz önüne alarak için formülümüzü yazıyoruz.

Bu formülden ’yi çekiyoruz.

Elimizde bulunan değerleri yerine yazıyoruz.

Buradan yörüngenin basıklığını hesaplıyoruz.

Ayrıca bahsetmek gerekir ki bu değer çözümün başında bahsettiğimiz değerine uymaktadır.

***3. En hızlı olduğu noktadaki hızı ():***

Bir önceki soruda da bahsettiğimiz gibi bir cismin maksimum hıza ulaştığı zaman cismin enberi noktasında bulunduğu andır. Yani bize aslında cismin enberi noktasındaki hızı () sorulmaktadır. Bunun için bir önceki soruda da kullandığımız (veya ) formülünü kullanıyoruz. Bu formül aşağıdaki gibidir.

Bu formülde bulunan parametrelerin tamamının değerini biliyoruz. Bu nedenle direkt olarak bu değerleri formülde yerine yazabiliriz. Ayrıca ’yi bulabilmek için ifadeyi şimdiden karekök içine almamız uygundur.

Buradan cismin yörüngesinde erişebileceği en yüksek hızı hesaplıyoruz.

***4. Eliptik yörüngede gezegenlerin Tisserand Parametreleri ():***

Öncelikle cismimizin hangi gezegenler ile etkileşimde olabileceğini bulmamız gerekmektedir. Bunun için cismin yörüngesini incelemek uygun olacaktır. Bunu bir çizim ile gösterebiliriz.

b

b

Cisim

Yörüngeden görüleceği üzere yörüngenin yarı-küçük eksen (semi-minor axis) değerini bulmak cismin hangi gezegenler ile etkileşimde olabileceğini belirleyebilmek için yine önemlidir. Yarı küçük ekseni hemen hesaplıyoruz.

Formülü yarı-küçük eksene göre düzenlersek;

Şimdi elimizde bulunan değerleri direkt olarak yerine yazıyoruz.

Buradan yarı-küçük eksen değeri bulunur.

Ayrıca yani enöte uzaklığını hesaplamak da faydalı olacaktır. Bunun için direkt aşağıdaki formülü kullanıyoruz.

Değerleri yerine yazıyoruz.

Buradan enöte uzaklığı bulunur.

Ayrıca belirtmek gerekirse bu değeri yarı-büyük eksen değerinin iki katından; yani enberi uzaklığını çıkartarak da bulabilirdik. Ama yinede formül ile hesaplamanın ikinci bir yol olarak akılda bulunması uygundur.

Şimdi bulduğumuz tüm değerleri tekrar yazıyoruz.

Bu değerler ile genel bir analiz yapabiliriz. Bu cisim Güneşe aralığında veya bu aralığa yakın uzaklıkta bulunan gezegenler ile etkileşime girme kapasitesinde sahiptir. Bu gezegenleri sırasıyla listeleyerek devam edebiliriz.

Dünya ->

Mars ->

Jüpiter ->

Cisim bu 3 gezegen ile etkileşimde olabilir. Bu nedenle bu üç gezegenin Tisserand Parametrelerini hesaplamak uygun olacaktır. Bunun için her bir gezegenin yarı-büyük eksen değerlerini bildiğimiz biçimde yazıyoruz.

Şimdi Tisserand parametrelerini hesaplamadan önce inclination yani yörüngenin eğiklik değerini dereceden radyana çeviriyoruz.

Artık Tisserand parametrelerini teker teker her bir gezegen için hesaplamaya başlayabiliriz. İlk olarak Dünya ile başlıyoruz. (*Cevaplar sorunun sonunda bulunan python kodu ile hesaplanmıştır.*)

Değerleri yerine yazıyoruz.

Buradan Dünya için Tisserand parametresi bulunur.

Şimdi Mars için aynı işlemleri yapıyoruz.

Değerleri yerine yazıyoruz.

Buradan Mars için Tisserand parametresi bulunur.

Son olarak Jüpiter için aynı işlemleri yapıyoruz.

Değerleri yerine yazıyoruz.

Buradan Jüpiter için Tisserand parametresi bulunur.

***b) Cismin birim kütle başına toplam enerjisi 0.0 AB2/gün2 ise:***

***Yörünge cinsinin belirlenmesi:***

Soruda verildiği üzere birim kütle başına toplam enerji formülünü aşağıdaki biçimde yazabiliriz.

Buradan anlaşılacağı üzere değerimiz sıfırdır. Yani bunu matematiksel olarak gösterirsek;

Önbilgide bahsettiğimiz üzere birim kütle başına toplam enerji’nin sıfıra eşit olması cismin yörüngesinin ***parabolik bir yörünge*** olduğu anlamına gelmektedir. Yani bunu matematiksel olarak gösterirsek;

Artık sorumuzu çözmeye başlayabiliriz.

***1.Yarı-büyük eksen uzunluğu (Semi-major axis) ():***

Parabolik bir yörünge çok fazlaca uzatılmış (stretched) bir eliptik yörünge gibi düşünülebilir. Bu nedenle yarı-büyük eksen uzunluğunu bulmak mümkün değildir. İstersek bunu matematiksel olarak enerji formülünden de çıkartabiliriz.

Burada bir sabit olduğundan zaten sıfır olamaz. Limitsel olarak düşünürsek değerinin sonsuza doğru gitmesi durumunda ancak enerji sıfır değerine yaklaşabilir. Sonuç olarak belirtecek olursak;

***2. Yörüngenin basıklığı (Orbital eccentricity) ():***

Zaten sorunun başında belirttiğimiz gibi olması durumunda değeri 1’e eşit olmaktadır.

***3. En hızlı olduğu noktadaki hızı ():***

Parabolik yörüngeler aslında cismin yani enberi uzaklıklarına göre tanımlanmaktadır. Bunun nedeni zaten az önce bahsettiğimiz iki parametreden kaynaklanmaktadır. Bu noktadaki hız ise aşağıdaki formül ile hesaplanabilmektedir.

Ekstra bilgi olarak belirtmek gerekir ise bu hız aynı zamanda “kaçış hızı” olarak da bilinmektedir. Elimizde bütün değerler bulunduğundan direkt olarak yerine yazıyoruz.

Buradan bulunur.

***c) Cismin birim kütle başına toplam enerjisi 5.544988×10−5 AB2/gün2 ise:***

***Yörünge cinsinin belirlenmesi:***

Soruda verildiği üzere birim kütle başına toplam enerji formülünü aşağıdaki biçimde yazabiliriz.

Buradan anlaşılacağı üzere değerimiz sıfırdan büyüktür. Yani bunu matematiksel olarak gösterirsek;

Önbilgide bahsettiğimiz üzere birim kütle başına toplam enerji’nin sıfırdan büyük olması cismin yörüngesinin ***hiperbolik bir yörünge*** olduğu anlamına gelmektedir. Yani bunu matematiksel olarak gösterirsek;

Artık sorumuzu çözmeye başlayabiliriz.

***1.Yarı-büyük eksen uzunluğu (Semi-major axis) ():***

Yine birim kütle başına toplam enerji formülünü yazarak işe başlıyoruz.

Bu denklemi ’ya göre düzenleyip yeniden yazabiliriz.

Bu ifadede ve değerlerini biliyoruz. Bu değerleri yerine yazıyoruz.

Buradan yarı büyük eksen uzunluğu bulunur.

**UYARI:** *Uzunluk eksi olamaz*! burada matematiksel olarak eksi çıkmış bir değerdir.

***2. Yörüngenin basıklığı (Orbital eccentricity) ():***

Elimizde (yarı-büyük eksen) değeri ve (enberi uzaklığı) değeri bulunmaktadır. Bunu göz önüne alarak için formülümüzü yazıyoruz.

Bu formülden ’yi çekiyoruz.

Elimizde bulunan değerleri yerine yazıyoruz.

Buradan yörüngenin basıklığını hesaplıyoruz.

Ayrıca bahsetmek gerekir ki bu değer çözümün başında bahsettiğimiz değerine uymaktadır.

***3. En hızlı olduğu noktadaki hızı ():***

Yine bahsetmemiz gerekirse bir cismin maksimum hıza ulaştığı zaman cismin enberi noktasında bulunduğu andır. Yani bize aslında cismin enberi noktasındaki hızı () sorulmaktadır. Bu değeri hesaplayabilmek için hiperbolik yörüngelerde kullandığımız (veya) formülünü kullanıyoruz. (Orijinal olarak formül bazen olarak verilebilmektedir, burada biz direkt olarak karekökünü alıp formülü aşağıdaki biçimde yazdık.)

Burada bulunan bütün değerleri bildiğimizden direkt olarak yerine yazabiliriz.

Buradan cismin yörüngesinde erişebileceği en yüksek hızı hesaplıyoruz.

**Not (Ekstra):**  değerini direkt olarak genel hız formülü ile de hesaplayabilirdik.

***TISSERAND PARAMETRESİ İÇİN PYTHON KODU***

*import numpy as np*

*import math*

*ag=float(input("Gezegenin yorungesinin yari-buyuk eksen degerini giriniz (AB): "))*

*#semi-major axis of the object's orbit*

*a=2.66828*

*#eccentricity of the object's orbit*

*e=0.25693*

*#orbit's inclination in radians*

*i=0.22674*

*sqrt=(a/ag)\*(1-pow(e,2))\*np.cos(i)*

*prop=ag/a*

*Tg=prop+(2\*math.sqrt(sqrt))*

*print("Gezegeninizin Tisserand Parametresi: ",Tg)*

***SORU 3:*** *a) Neptün'ün Lagrange noktalarının koordinatlarını yaklaşık olarak hesaplayın ve şekil üzerinde gösterin.*

*b) Neptün etrafında kararlı bir yörüngede dolanabilecek bir cisim için en küçük ve en büyük dolanım periyotlarını yorumlayın ve hesaplayın.*

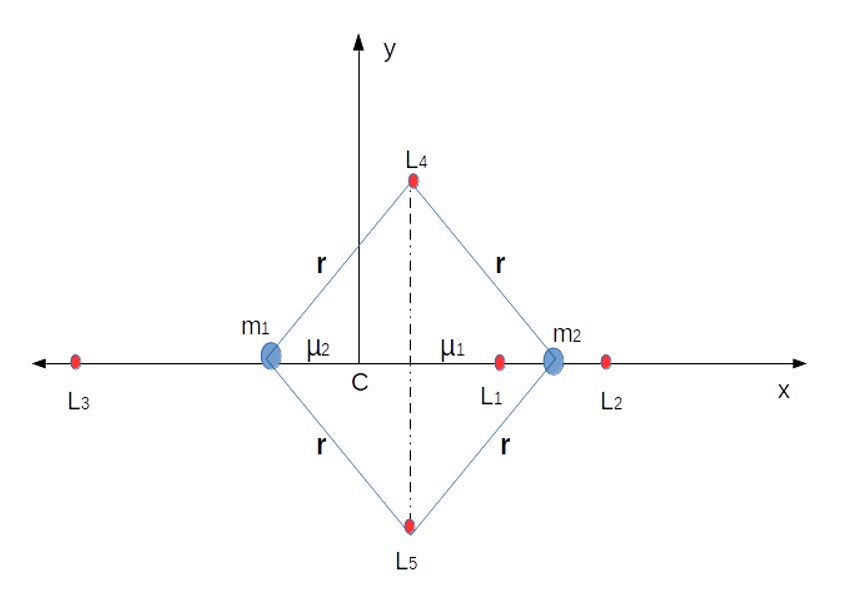
*c) Neptün'ün Lagrange noktalarında bulunabilecek cisimler için Jacobi sabitini hesaplayın.*

***ÇÖZÜM:***

Çözüme başlamadan önce Lagrange noktaları, Hill Küresi, Roche Limiti ve Jacobi sabiti hakkında kısa bir bilgilendirme yapmak iyi olacaktır.

Lagrange noktaları 3 cisim problemlerinde karşımıza çıkmaktadır. Bu noktalar 2 büyük kütleli cismin toplam kütleçekimsel kuvvetlerinin uzayda bulunan bu cisimlerden çok daha küçük bir kütleye sahip olan 3. Cismin hissettiği centrifugal kuvvetine eşit olduğu yerlerdir. (Centrifugal: merkezkaç “hayalet” kuvveti veya eylemsizlik kuvveti olarak geçer.)

5 ayrı Lagrange noktası bulunmaktadır. Bunlardan 3 tanesi () koordinat düzleminin ekseni üzerinde bulunmakta olup 2 tanesi ise () hem hem de koordinatlarına sahiplerdir. Bu noktaları şekil üzerindeki aşağıdaki biçimde gösterebilmekteyiz.



Burada önceden görmediğimiz bazı terimler bulunmakta. Bunları teker teker tanımlayacak olursak; noktası ve kütlelerinin kütlemerkezini (barycenter) göstermektedir. uzunluğu ve kütleleri arasındaki uzaklığa eşittir. ve ise kütle oranları olarak geçmektedir. İşlemleri basitleştirmek adına yapılan varsayımlar altında değeri ile noktası arasındaki uzaklığa, değeri ise ile noktası arasındaki uzaklığa eşittir.

Lagrange noktaları aşağıdaki formüller ile ise yani kütlesi en büyük olan ’in kütlemerkezine olan uzaklığının 1’den çok küçük olması ihtimalinde hesaplanabilmektedir. Burada ayrıca belirtmek gerekir ki genelde olarak alınır. (Örneğin Güneş olup Dünya olarak alınabilir.)

***Noktası:*** *( ve kütleli cisimlerin arasında olan Lagrange noktası)*

***Noktası:*** *( kütleli cismin sağında yer alan Lagrange noktası)*

***Noktası:*** *( kütleli cismin solunda yer alan Lagrange noktası)*

Buraya kadar olan Lagrange noktalarının x ekseni üzerinde bulunmaları nedeniyle sadece x koordinatlarının olduğundan bahsetmiştik. *()*

***Noktası:***

***Noktası:***

Fark edileceği üzere ve noktalarının koordinatları aynıdır. Bunu az önce gösterdiğimiz şekilden de görebilmekteyiz. Bu noktaların sadece koordinatları farklı olup bu koordinatlar da sadece işaret olarak birbirinin tersidir. Bu noktaların hesabında son olarak kullanacağımız kütle oranı değerini aşağıdaki formül ile hesaplayabileceğimizi söyleyebiliriz.

Bu değer kütlesine sahip cismin kütle oranıdır. kütlesine sahip cisim için kütle oranı olan ’i hesaplayabilmek için sadece pay’da yerine ’i yazacaktık.

Şimdide Roche limiti ve Hill küresi hakkında kısa bir bilgilendirme yapmak uygun olacaktır. Bir 3 cisim probleminde, en küçük kütleye sahip olan cismin, herhangi bir büyük kütleli cismin etrafında kararlı bir yörüngede dolanabilmesi için bazı limitler söz konusudur. İşte bu limitler Roche limiti ve Hill küresi ile belirlenmektedir.

Örneğin Güneş-Dünya-Ay olarak bir 3 cisim problemi oluşturursak herhangi bir uydu veya küçük bir cismin Dünya etrafında kararlı bir yörüngede dolanabilmesi için Dünya’ya maksimum ne kadar yakınlıkta ve uzaklıkta olabileceğini bu iki kavram ile belirlemekteyiz. Şimdi bu kavramları daha detaylı olarak açıklamayla devam edebiliriz.

Roche limiti herhangi bir küçük kütleli cismin büyük kütleli bir cisme ne kadar yaklaşabileceğinin limitini bize vermektedir. Bu uzaklık değerini aşağıdaki formül ile hesaplayabilmekteyiz.

Yine Güneş-Dünya-Ay örneğinden gidersek bu üç cisimden en büyük kütleye sahip olan yani Güneş, ise kütle büyüklüğü bakımından ikinci en büyük kütleye sahip olan ve küçük cismin etrafında dolandığı gezegenin/cismin kütlesi yani bu örnek için Dünya’nın kütlesidir. ise bu örnekten gidersek Dünya’nın yarıçapıdır. Eğer ki küçük cisim, gezegene bu uzaklıktan daha yakın bir mesafede olursa kütlesine göre cisim ya parçalanacak ya da yüzeye düşecektir. İşte bu uzaklığa biz Roche limiti diyoruz ve bu uzaklık cismin yörüngesinin kararlı olabileceği, gezegenin yüzeyine en yakın yörüngenin yarı-büyük eksenini verir.

Ayrıca belirtmek gerekir ki bu uzaklık ve kütleli cisimlerin yoğunlukları kullanılarak da hesaplanabilmektedir. Fakat biz bu soruda kütleler ile hesaplama yapacağız. O formülü yinede bilgi olması açısından aşağıdaki gibi gösterebiliriz. en büyük kütleye sahip olan cismin yarıçapı olmak üzere;

İkinci olarak Hill küresinden bahsedebiliriz. Hill küresi 3 cisim problemlerinde yine aynı örnekten gidersek kütlesi bakımından 2. en büyük kütleye sahip olan Dünya’nın kütleçekim etkisinin baskın olduğu ve Dünya’nın uydularını da içine alan hayali bir küredir. Bu kürenin sınırlarını ise az önce bahsettiğimiz Lagrange noktalarından ve belirlemektedir. Uydu/küçük cisim bu sınırların dışına çıkması durumunda bu cisme etkiyen çekim kuvveti en büyük kütleli olan Güneş’in çekimi olacaktır. Bu da cismin Güneş’in etrafında dolanması anlamına gelmektedir.

Hill küresinin yarıçapını aşağıdaki formül ile hesaplayabilmekteyiz.

Burada değeri 2. cismin yani örneğimize göre Dünya’nın Güneş etrafındaki yörüngesinin yarı-büyük eksen değerini temsil etmektedir. Bu formülden elde edeceğimiz değeri bize bu uydunun/küçük cismin Dünya’nın etrafında kararlı bir yörüngede dolanabilmesi için maksimum ne kadar uzaklıkta olabileceğini vermektedir. Aynı zamanda bu değer cismin yörüngesinin yarı-büyük eksen uzunluğunu verecektir.

Eğer ki bu yörüngelerin periyotlarını hesaplamak istersek aşağıdaki formülü kullanmamız uygun olacaktır.

Bu soru için değerini Neptün için almak uygun olacaktır.

Son olarak da Jacobi sabitinden bahsetmemiz uygun olacaktır. Bu sabiti aşağıdaki formül ile hesaplayabilmekteyiz.

Şimdi bu formüldeki parametreleri teker teker açıklamamız iyi olacaktır. direkt olarak bizim Jacobi sabitimizdir. ise 3. Cismimizin hızı olarak geçer. Ekstra olarak bahsetmek gerekir ki olacağından olmalıdır. Bunun önemi ise 3. Cismimizin sadece bu şartın sağlandığı bölgelerde bulunabilmesinden gelmektedir.

ise bir açılım olarak düşünülebilir. Bu açılım birçok kitapta farklı bir şekilde yorumlanmakta olup biz aşağıdaki açılımı çözümümüzde kullanacağız.

Bunu göz önünde bulundurarak Jacobi sabitimizi aşağıdaki formül ile hesaplayabiliriz.

Burada daha bahsetmediğimiz ve kavramları ile beraber kavramı bulunmakta. Öncelikle yani açısal hız değerini aşağıdaki formül ile gösterebilmekteyiz. (; 3. Küçük cismin 2. Cisme olan uzaklığıdır.)

ve kavramları ise sırasıyla kütlesine sahip cismin; kütleli ve kütleli cisimlere olan uzaklığıdır. Son olarak bahsedecek olursak ; kütlesine sahip cismin yörünge hızının karesi olduğundan genel hız denkleminden faydalanılacaktır.

***a) Neptün’ün Lagrange Noktaları:***

Sorumuzda Güneş-Neptün Lagrange noktalarını (Sun-Neptune Lagrangian Points) hesaplayacağız. Bunun için öncelikle Güneş’in ve Neptün’ün kütlelerini kilogram cinsinden yazıyoruz. Kütlesi daha büyük olan Güneş olduğu için Güneş’in kütlesini , Neptün’ün kütlesini olarak alıyoruz.

Şimdi uzaklığını yani Güneş ve Neptün arası uzaklığı kilometre cinsinden yazıyoruz.

Bu verileri yazdıktan sonra artık işlemlerimize başlamadan önce son olarak değerini hesaplamamız gerekmektedir. değerini aşağıdaki formül ile hesaplayabilmekteyiz.

Buradaki değerleri bildiğimizden direkt olarak formülde yerine yazdık. Sonuç olarak elde edilen değeri aşağıdaki gibidir.

olduğuna göre artık Lagrange noktalarımızı sırayla hesaplamaya başlayabiliriz. Hesaplamalarımızda iki tane Lagrange koordinatı bulunacaktır. Bunlardan birincisi ve ’nin kütlemerkezi olan noktasından Lagrange noktalarının kilometre cinsinden uzaklığını verecektir. İkincisi ise Güneş ile Neptün arası uzaklığı bir birim alırsak () Lagrange noktalarının bu birim cinsinden kütlemerkezine uzaklığını verecektir. Bunlar göz önüne alınarak hesaplarımıza başlıyoruz. (Bu şıkkın çözümü sorunun sonunda verilen **Python Kodu** ile yapılmıştır.)

***Noktası:*** *( ve kütleli cisimlerin arasında olan Lagrange noktası)*

Değerleri yerine yazıyoruz.

Buradan noktasının koordinatı bulunur.

Bahsettiğimiz üzere noktası ekseni üzerinde bulunduğundan dolayı koordinatı direkt olarak sıfırdır.

Güneş ile Neptün arası uzaklığı bir birim alırsak () elde edilen koordinatlar aşağıdaki şekilde hesaplanabilir. (Sonraki nokta hesaplarında bu formüller gösterilmeden direkt olarak bir hesap yapılacaktır.)

Buradan ve ’in birimsel olarak koordinatları bulunur.

***Noktası:*** *( kütleli cismin sağında yer alan Lagrange noktası)*

Değerleri yerine yazıyoruz.

Buradan noktasının koordinatı bulunur.

Bahsettiğimiz üzere noktası ekseni üzerinde bulunduğundan dolayı koordinatı direkt olarak sıfırdır.

Güneş ile Neptün arası uzaklığı bir birim alırsak () az önce elde edilen koordinatlar ve birimsel olarak bulunur.

***Noktası:*** *( kütleli cismin solunda yer alan Lagrange noktası)*

Değerleri yerine yazıyoruz.

Buradan noktasının koordinatı bulunur.

Bu değerin eksi çıkması Lagrange noktasının ve ’nin kütlemerkezi olan noktasının solunda kalmasından dolayıdır. noktasını koordinat düzleminin orijin noktası gibi düşünmek bunun nedenini tam olarak açıklayacaktır.

Bahsettiğimiz üzere noktası ekseni üzerinde bulunduğundan dolayı koordinatı direkt olarak sıfırdır.

Güneş ile Neptün arası uzaklığı bir birim alırsak () az önce elde edilen koordinatlar ve birimsel olarak bulunur.

***Noktası:***

Bu nokta ekseni üzerinde olmadığından bir koordinatına sahiptir. Şimdi değerleri yerine yazıyoruz.

Buradan noktasının ve koordinatları bulunur.

Güneş ile Neptün arası uzaklığı bir birim alırsak () az önce elde edilen koordinatlar ve birimsel olarak bulunur.

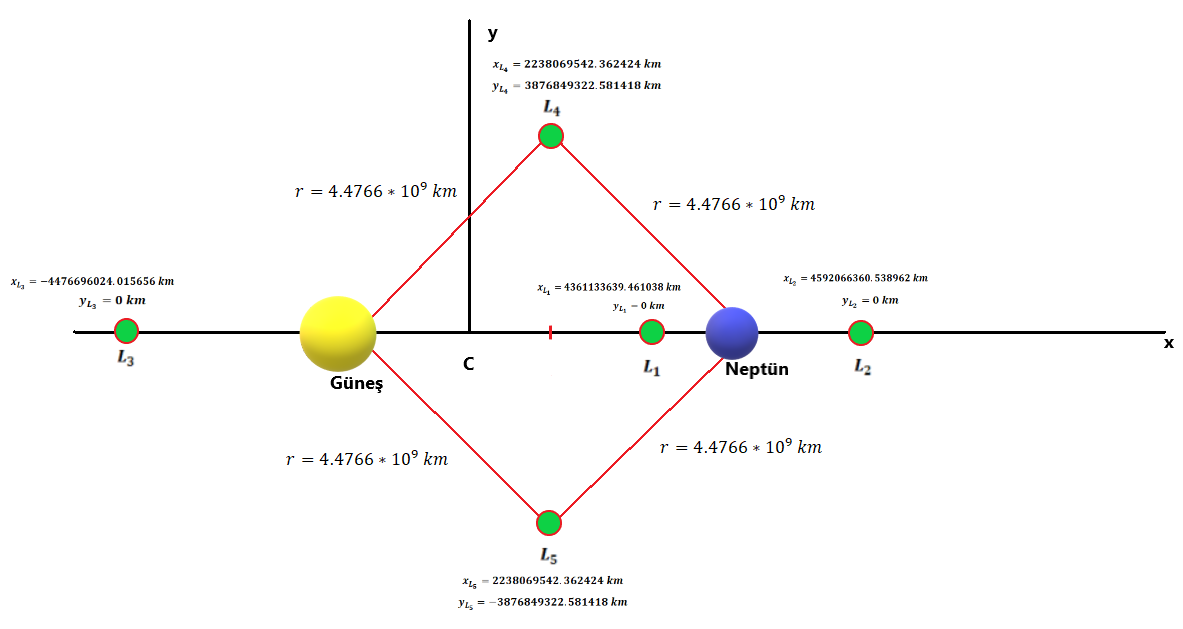
***Noktası:***

Bu nokta ekseni üzerinde olmadığından bir koordinatına sahiptir. Şimdi değerleri yerine yazıyoruz.

Buradan noktasının ve koordinatları bulunur.

Güneş ile Neptün arası uzaklığı bir birim alırsak () az önce elde edilen koordinatlar ve birimsel olarak bulunur.

Artık soruda istenilen şekli çizebiliriz. Çizimimiz bir sonraki sayfada bulunmaktadır.



Şekli desteklemek üzere Lagrange noktalarının koordinatlarını biçiminde son bir kez toplu bir biçimde yazarsak;

***Noktası:***

*Kilometre Cinsinden:*

*Birimsel Cinsten:*

***Noktası:***

*Kilometre Cinsinden:*

*Birimsel Cinsten:*

***Noktası:***

*Kilometre Cinsinden:*

*Birimsel Cinsten:*

***Noktası:***

*Kilometre Cinsinden:*

*Birimsel Cinsten:*

***Noktası:***

*Kilometre Cinsinden:*

*Birimsel Cinsten:*

***b) Neptün’ün etrafında kararlı yörüngede dolanabilecek cismin en büyük ve en küçük dolanım periyodu:***

Bu soruda Hill Küresi ve Roche Limiti kavramlarını kullanmamız gerekmektedir. İlk olarak Neptün etrafında kararlı yörüngede dolanabilecek cismin en büyük dolanım periyodunu hesaplamakla başlayabiliriz. En büyük dolanım periyoduna sahip olması bu cismin yörüngesinin Neptün’den maksimum uzaklıkta olması anlamına gelmektedir. Bu bilgiyi baz alarak Hill Küresi ile önce cismin en büyük dolanım periyodunu bulup sonrasında en küçük dolanım periyodu ile devam edeceğiz.

Hesaplamalardan önce Neptün için değerini bulmamız cismin periyodunu bulmak açısından önemlidir. değerini bulmak için kütle çekim sabiti (Gravitational constant) ve Neptün’ün kütlesini kullanacağız. Bu iki değeri birimlerine de dikkat ederek aşağıdaki şekilde yazabiliriz. (’nin birimini yazarken (Newton) birimini açarak bu hale getirmiş olduk.)

Bu iki değeri çarparak () bu yörünge hesabı için kullanacağımız değerini buluyoruz.

Bu değeri cinsinden yazmak daha da işimize yarayabilir. Bu nedenle değerini bu birim cinsinden ifade olarak çevirmemiz gerekmektedir. ve buradan olduğuna göre bu çevrimi aşağıdaki gibi yapabiliriz.

Buradan değerini tam olarak kullanabileceğimiz şekilde aşağıdaki gibi yazıyoruz.

Artık yörünge hesaplarına başlayabiliriz. (Sorunun sonunda verilen **Python Kodu** ile çözüm yapılmıştır.)

Hill küresinin yarıçapını aşağıdaki formül ile bulabileceğimizden bahsetmiştik.

Bu ifadeyi sorumuza göre düzenleyerek tekrar yazıyoruz.

Şimdi bu formülde bulunan ifadelerin değerlerini yazıyoruz.

Şimdi bu değerleri formülde yerine yazıyoruz.

Buradan yani Hill küresinin yarıçapı elde edilir.

Yani Neptün etrafında dolanan küçük cismin yörüngesinin kararlı olması için Neptün’den maksimum 115944494.82 km uzaklıkta olması mümkündür. Artık en büyük dolanım periyodunu hesaplamaya geçebiliriz.

Bunun için zaten bilgi olarak aşağıdaki formülü kullanabileceğimizi demiştik.

Burada değeri değerine eşit olup ’ye karşılık gelmektedir. Bunun nedeni yörüngenin merkezinin Neptün olması ve buradan bu cismin uzaklığının aynı zamanda cismin yörüngesinin yarı-büyük eksen uzunluğuna eşit olmasıdır. değerinin zaten olduğunu bulmuştuk. Birimlere dikkat edersek periyot değerinin bu işlem sonucunda saniye birimiyle çıkacağını anlayabiliriz. Bu değeri sonrasında gün’e çevirmek için ekstradan küçük bir işlem yapmamız gerekmektedir.

Bu kadar açıklamadan sonra artık formülümüze elimizde bulunan bütün değerleri yazabiliriz.

Buradan yani periyot değeri saniye cinsinden bulunur.

Bu değeri gün cinsinden yazmak için bulunan değeri ’e bölerek bulabilir, gün cinsinden bulunan değeri de ’e bölerek bu periyot değerini yıl cinsinden bulabiliriz. Bu işlemler sonucunda Neptün etrafında kararlı yörüngede dolanabilecek küçük cismin ***en büyük dolanım periyodunu*** gün ve yıl cinsinden aşağıdaki gibi elde ederiz.

İkinci olarak Neptün etrafında kararlı yörüngede dolanabilecek cismin en küçük dolanım periyodunu hesaplıyoruz. En küçük dolanım periyoduna sahip olması bu cismin yörüngesinin Neptün’den minimum uzaklıkta olması anlamına gelmektedir. Bu uzaklık değerini bulabilmek için Neptün etrafında yörüngede dolanan küçük cismin, Neptün’e kararlı yörüngesini koruyarak maksimum ne kadar yaklaşabileceğini belirlememiz gerekmektedir. Bunun için Roche Limiti kullanılır.

Roche Limitini aşağıdaki formül ile hesaplayabilmekteyiz.

Bu ifadeyi sorumuza göre düzenleyerek tekrar yazıyoruz.

Şimdi bu formülde bulunan ifadelerin değerlerini yazıyoruz.

Şimdi bu değerleri formülde yerine yazıyoruz.

Buradan Roche Limiti yani değeri elde edilir.

Yani Neptün etrafında dolanan küçük cismin yörüngesinin kararlı olması için Neptün’den maksimum 954571.99144 km yakınlıkta olması mümkündür. Artık en küçük dolanım periyodunu hesaplamaya geçebiliriz.

Yine aynı formülü kullanıyoruz.

Burada değeri değerine eşit olup ’ye karşılık gelmektedir. Yine tekrar bahsetmemiz gerekirse bunun nedeni yörüngenin merkezinin Neptün olması ve buradan bu cismin uzaklığının aynı zamanda cismin yörüngesinin yarı-büyük eksen uzunluğuna eşit olmasıdır. değerinin zaten olduğunu bulmuştuk. Birimlere dikkat edersek periyot değerinin bu işlem sonucunda saniye birimiyle çıkacağını anlayabiliriz. Bu değeri sonrasında gün’e çevirmek için ekstradan küçük bir işlem yapmamız gerekmektedir.

Bu kadar açıklamadan sonra artık formülümüze elimizde bulunan bütün değerleri yazabiliriz.

Buradan yani periyot değeri saniye cinsinden bulunur.

Bu değeri gün cinsinden yazmak için bulunan değeri ’e bölerek bulabilir, gün cinsinden bulunan değeri de ’e bölerek bu periyot değerini yıl cinsinden bulabiliriz. Bu işlemler sonucunda Neptün etrafında kararlı yörüngede dolanabilecek küçük cismin ***en küçük dolanım periyodunu*** gün ve yıl cinsinden aşağıdaki gibi elde ederiz.

Buradan anlaşılıyor ki Neptün gezegeni büyük bir ihtimalle Güneş’e olan uzaklığı sebebiyle çok uzaktaki küçük cisimleri bile kendi yörüngesine katabilme özelliğine sahiptir.

***NOT:*** *Bulunan Roche Limiti hatalı olabilir, yazılan birden çok kod denemesi sonucu farklı sonuçlar elde edilmiş ve en son olarak bu değere karar verilmiştir. Yoğunluk ile bulunan Roche Limiti ile bu değer uyuşmamaktadır. (Karşılaştırması en sonda* ***Python kodu*** *olarak bulunmaktadır.)*

*KOD ÇIKTISI:*

*Roche Limiti (Yoğunluk): 1604246.1649490457 km*

*Minimum periyot değeri (saniye cinsinden): 4883606.921947526 saniye*

*Minimum periyot değeri (gün cinsinden): 56.523228263281545 gün*

*Minimum periyot değeri (yıl cinsinden): 0.1548581596254289 yıl*

*------------------------------------------------------------*

*Roche Limiti (Kütle): 954571.9914476561 km*

*Minimum periyot değeri (saniye cinsinden): 2241543.736049594 saniye*

*Minimum periyot değeri (gün cinsinden): 25.943793241314744 gün*

*Minimum periyot değeri (yıl cinsinden): 0.07107888559264314 yıl*

*------------------------------------------------------------*

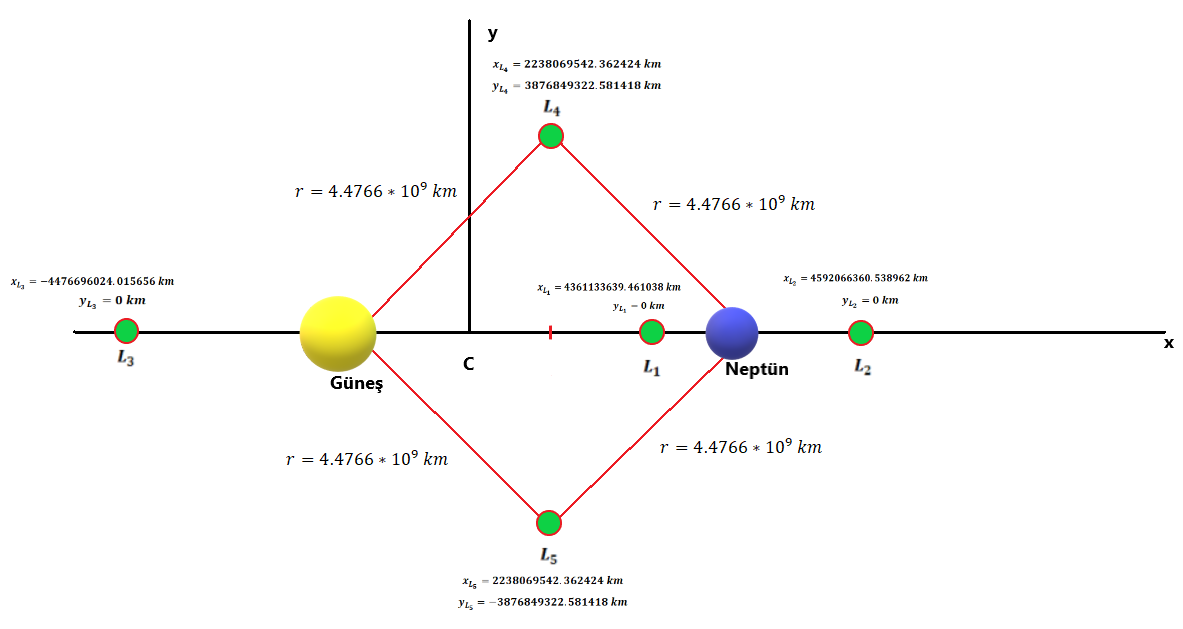
***c) Neptün'ün Lagrange noktalarında bulunabilecek cisimler için Jacobi sabiti:***

Jacobi sabitini hesaplamak için kullanacağımız formül aşağıdaki gibiydi.

Bu formülde bulunan parametresini aşağıdaki açılım ile bulabilmekteyiz.

Burada bulunan ve değerleri aşağıdaki formüller ile belirlenmektedir.

Şimdi bütün Lagrange noktalarına sırasıyla bu formülü uygulayıp Jacobi sabitlerini bulmaya başlayabiliriz. Şeklimizi tekrar hatırlamak amaçlı gösterebiliriz.



Bu sorunun çözümünde bazı varsayımları yapmak işimize yarayacaktır. Bu varsayımları aşağıda sırasıyla gerçekleştirebiliriz.

ve yani Güneş ve Neptün’ün kütleleri toplamını 1 (birim) alıyoruz.

Bu varsayım sonucu ve değerlerini bulabilmek için Neptün’ün kütlesini Güneş ve Neptün’ün kütleleri toplamına oranlayabiliriz. Bu durumda;

Buradan yani Güneş’in kütlesini ilişkisini göz önüne alarak veya yine orantı yaparak kolayca hesaplayabiliriz.

Veya

Artık ve değerlerini birimsel olarak bulmuş durumdayız. Şimdi ve kütleleri arasını yani ’yi 1 (birim) olarak alıyoruz. Bu durumda küçük kütlesinin ve kütlelerine olan uzaklıkları, sırasıyla ve , toplamı yine 1 olacaktır.

Buradan yola çıkarsak kütle oranları ve aynı zamanda ve kütlelerinin sırasıyla kütle merkezlerine uzaklıkları olan ve değerlerinin toplamı da 1’e eşit olacaktır. Bu değerleri aşağıdaki biçimde hesaplayabiliriz.

Son olarak bu varsayımların sonucu olarak aşağıdaki ilişkiler yazılabilmektedir.

Artık noktaların Jacobi sabitini belirlemeye başlayabiliriz. (Bu şıkkın çözümü sorunun sonunda verilen **Python kodu** ile yapılmıştır.)

***Noktası:***

*Kilometre Cinsinden:*

*Birimsel Cinsten:*

Jacobi formülümüzü aşağıdaki gibi yazabiliyoruz.

Bu formülde kullanılan parametrelerin noktasına göre değerleri aşağıdaki gibi yazılabilir.

Buradan ve bulunabilir.

Ayrıca genel hız denklemini kullanarak değerini belirleyebiliriz. Burada ve aynı değere olup; 3. Cismin yani lagrange noktasının bulunduğu yerin, ve kütlelerinin kütlemerkezine uzaklığına eşittirler. (Çünkü Lagrange noktaları Güneş ve Neptün ile beraber kütlemerkezinin etrafında dönerler.)

Şimdi bulunan bütün ifadeleri yerine yazıyoruz.

Buradan Jacobi sabiti bulunur.

***Noktası:***

*Kilometre Cinsinden:*

*Birimsel Cinsten:*

Jacobi formülümüzü aşağıdaki gibi yazabiliyoruz.

Bu formülde kullanılan parametrelerin noktasına göre değerleri aşağıdaki gibi yazılabilir.

Buradan ve bulunabilir.

Ayrıca genel hız denklemini kullanarak değerini belirleyebiliriz. Burada ve aynı değere olup; 3. Cismin yani lagrange noktasının bulunduğu yerin, ve kütlelerinin kütlemerkezine uzaklığına eşittirler.

Şimdi bulunan bütün ifadeleri yerine yazıyoruz.

Buradan Jacobi sabiti bulunur.

***Noktası:***

*Kilometre Cinsinden:*

*Birimsel Cinsten:*

Jacobi formülümüzü aşağıdaki gibi yazabiliyoruz.

Bu formülde kullanılan parametrelerin noktasına göre değerleri aşağıdaki gibi yazılabilir.

Buradan ve bulunabilir.

Ayrıca genel hız denklemini kullanarak değerini belirleyebiliriz. Burada ve aynı değere olup; 3. Cismin yani lagrange noktasının bulunduğu yerin, ve kütlelerinin kütlemerkezine uzaklığına eşittirler.

Şimdi bulunan bütün ifadeleri yerine yazıyoruz.

Buradan Jacobi sabiti bulunur.

***Noktası:***

*Kilometre Cinsinden:*

*Birimsel Cinsten:*

Jacobi formülümüzü aşağıdaki gibi yazabiliyoruz.

Bu noktada ve noktasında bazı değerlerimiz değişim yaşayacaktır. Öncelikle ve değerleri aynı şekilde kalacaktır. Çünkü Güneş-Kütlemerkezi ve Neptün-Kütlemerkezi arası mesafede bir değişiklik olmadı. Fakat artık Lagrange noktalarımız bir koordinatına sahip ve bu noktada bulunan herhangi bir cismin, ve kütlelerine olan uzaklığı aynı olacaktır. Bunun nedenini sorunun başında verdiğimiz şekil üzerinden de görebiliriz. Sorunun başında ’yi 1 aldığımızdan dolayı ve değerleri yani 3. Küçük olan cismin ve kütlelerine olan uzaklığı aşağıdaki gibi olacaktır;

Peki bu durumda noktasının kütlemerkezine olan uzaklığı nasıl belirlenebilir? Az önce bahsettiğimiz gibi bu noktanın ve noktasının hem hem koordinatı bulunmakta. Direkt olarak koordinat düzleminde bunu düşünürsek aşağıdaki ifadeyi kullanarak (üçgen oluşturup Pisagor teoremi) noktasının kütlemerkezine olan uzaklığını belirleyebiliriz.

Buradan direkt olarak hız denkleminde kullanacağımız ve tabii ki aynı zamanda değerini bulabiliriz.

Hız denklemimizi artık hesaplayabiliriz.

Şimdi bulunan bütün ifadeleri yerine yazıyoruz.

Buradan Jacobi sabiti bulunur.

***Noktası:***

*Kilometre Cinsinden:*

*Birimsel Cinsten:*

Jacobi formülümüzü aşağıdaki gibi yazabiliyoruz.

’yi 1 aldığımızdan dolayı ve değerleri yani 3. Küçük olan cismin ve kütlelerine olan uzaklığı aşağıdaki gibi olacaktır;

noktasının hem hem koordinatı bulunmakta. Direkt olarak koordinat düzleminde bunu düşünürsek aşağıdaki ifadeyi kullanarak (üçgen oluşturup Pisagor teoremi) noktasının kütlemerkezine olan uzaklığını belirleyebiliriz.

Buradan direkt olarak hız denkleminde kullanacağımız ve tabii ki aynı zamanda değerini bulabiliriz.

Hız denklemimizi artık hesaplayabiliriz.

Şimdi bulunan bütün ifadeleri yerine yazıyoruz.

Buradan Jacobi sabiti bulunur.

***LAGRANGE NOKTALARI İÇİN PYTHON KODU***

*import math*

*#Sun's Mass in kilograms*

*m1=1.989E30*

*#Neptune's Mass in kilograms*

*m2=1.024E26*

*#Distance between the Sun and Neptune in kilometers*

*r=4.4766E9*

*#mass ratio (mu2)*

*mu2=m2/(m1+m2)*

*print(50\*"-")*

*print("Mü2 değeri: ",mu2)*

*XL1=r\*(1-pow((mu2/3),(1/3)))*

*XL2=r\*(1+pow((mu2/3),(1/3)))*

*XL3=-r\*(1+(5\*mu2/12))*

*XL4and5=(r/2)\*((m1-m2)/(m1+m2))*

*YL4=(math.sqrt(3)/2)\*r*

*YL5=-YL4*

*print(50\*"-")*

*print("1. Lagrange Noktası")*

*print("x ekseni: ",XL1, "km")*

*print("y ekseni: 0 km")*

*print("r=1 birim olmak üzere eksen değerleri")*

*print(50\*"\*")*

*print("Birimsel x ekseni: ", XL1/r, "birim")*

*print("Birimsel y ekseni: ", 0/r, "birim")*

*print(50\*"-")*

*print("2. Lagrange Noktası")*

*print("x ekseni: ",XL2, "km")*

*print("y ekseni: 0 km")*

*print("r=1 birim olmak üzere eksen değerleri")*

*print(50\*"\*")*

*print("Birimsel x ekseni: ", XL2/r, "birim")*

*print("Birimsel y ekseni: ", 0/r, "birim")*

*print(50\*"-")*

*print("3. Lagrange Noktası")*

*print("x ekseni: ",XL3, "km")*

*print("y ekseni: 0 km")*

*print("r=1 birim olmak üzere eksen değerleri")*

*print(50\*"\*")*

*print("Birimsel x ekseni: ", XL3/r, "birim")*

*print("Birimsel y ekseni: ", 0/r, "birim")*

*print(50\*"-")*

*print("4. Lagrange Noktası")*

*print("x ekseni: ",XL4and5, "km")*

*print("y ekseni: ", YL4, "km")*

*print("r=1 birim olmak üzere eksen değerleri")*

*print(50\*"\*")*

*print("Birimsel x ekseni: ", XL4and5/r, "birim")*

*print("Birimsel y ekseni: ", YL4/r, "birim")*

*print(50\*"-")*

*print("5. Lagrange Noktası")*

*print("x ekseni: ",XL4and5, "km")*

*print("y ekseni: ", YL5, "km")*

*print("r=1 birim olmak üzere eksen değerleri")*

*print(50\*"\*")*

*print("Birimsel x ekseni: ", XL4and5/r, "birim")*

*print("Birimsel y ekseni: ", YL5/r, "birim")*

*print(50\*"-")*

***HİLL KÜRESİ VE ROCHE LİMİTİ HESABI İÇİN PYTHON KODU***

*import math*

*#Mass of the Sun*

*M=1.989E30 #kg*

*#Mass of Neptune*

*m=1.024E26 #kg*

*#GM value for Neptune*

*GM=6834257.92 #km^3 sn^-2*

*#Semi-major axis of Neptune's orbit*

*a=4495060000 #km*

*#Radius of Neptune*

*r=24622 #km*

*#Hill Sphere's radius*

*r\_hill=a\*pow((m/(3\*M)),(1/3))*

*print(60\*"-")*

*print("Hill küresinin yarıçapı: ",r\_hill, "km")*

*#Maximum period calculation (in seconds unit)*

*Tmax=math.sqrt(pow(r\_hill,3)\*((4\*pow(math.pi,2))/GM))*

*print("Maksimum periyot değeri (saniye cinsinden): ",Tmax, "saniye")*

*#Maximum period in days and years unit*

*Tmax=Tmax/(60\*60\*24)*

*print("Maksimum periyot değeri (gün cinsinden): ", Tmax, "gün")*

*Tmax=Tmax/365*

*print("Maksimum periyot değeri (yıl cinsinden): ", Tmax, "yıl")*

*print(60\*"\*")*

*print(60\*"\*")*

*#Roche Limit*

*roche=r\*((3\*M/m)\*\*(1/3))*

*print("Roche Limiti: ",roche, "km")*

*#Minimum period calculation (in seconds unit)*

*Tmin=math.sqrt(pow(roche,3)\*((4\*pow(math.pi,2))/GM))*

*print("Minimum periyot değeri (saniye cinsinden): ",Tmin, "saniye")*

*#Minimum period in days and years unit*

*Tmin=Tmin/(60\*60\*24)*

*print("Minimum periyot değeri (gün cinsinden): ", Tmin, "gün")*

*Tmin=Tmin/365*

*print("Minimum periyot değeri (yıl cinsinden): ", Tmin, "yıl")*

*print(60\*"-")*

*print(roche\*(3\*M/m)\*\*(1/3))*

***JACOBİ SABİTİ HESABI İÇİN PYTHON KODU***

*import math*

*a=input("Hangi lagrange noktasını kullanacağınızı yazınız: ")*

*mu1=0.999948512*

*mu2=0.000051480507*

*GM=1*

*w=1*

*print(50\*"-")*

*if a=="L1":*

*x=0.97420*

*y=0*

*rho1=x+mu2*

*rho2=mu1-x*

*v2=GM\*((2/x)-(1/x))*

*print("rho1 değeri: ",rho1)*

*print("rho2 değeri: ",rho2)*

*print("v^2 değeri: ",v2)*

*C=2\*((mu1/rho1)+(mu2/rho2))+(w\*(x\*\*2+y\*\*2))-v2*

*print("Jacobi sabiti: ", C)*

*elif a=="L2":*

*x=1.02579*

*y=0*

*rho1=x+mu2*

*rho2=x-mu1*

*v2=GM\*((2/x)-(1/x))*

*print("rho1 değeri: ",rho1)*

*print("rho2 değeri: ",rho2)*

*print("v^2 değeri: ",v2)*

*C=2\*((mu1/rho1)+(mu2/rho2))+(w\*(x\*\*2+y\*\*2))-v2*

*print("Jacobi sabiti: ", C)*

*elif a=="L3":*

*x=-1.00002*

*y=0*

*rho1=-x-mu2*

*rho2=mu1-x*

*v2=GM\*((2/x)-(1/x))*

*print("rho1 değeri: ",rho1)*

*print("rho2 değeri: ",rho2)*

*print("v^2 değeri: ",v2)*

*C=2\*((mu1/rho1)+(mu2/rho2))+(w\*(x\*\*2+y\*\*2))-v2*

*print("Jacobi sabiti: ", C)*

*elif a=="L4":*

*x=0.49995*

*y=0.86602*

*rho1= 1*

*rho2= 1*

*r=math.sqrt(pow(x,2)+pow(y,2))*

*v2=GM\*((2/r)-(1/r))*

*print("3. cismin kütlemerkezine uzaklığı: ",r)*

*print("rho1 değeri: ",rho1)*

*print("rho2 değeri: ",rho2)*

*print("v^2 değeri: ",v2)*

*C=2\*((mu1/rho1)+(mu2/rho2))+(w\*(x\*\*2+y\*\*2))-v2*

*print("Jacobi sabiti: ", C)*

*elif a=="L5":*

*x=0.49995*

*y=-0.86602*

*rho1= 1*

*rho2= 1*

*r=math.sqrt(pow(x,2)+pow(y,2))*

*v2=GM\*((2/r)-(1/r))*

*print("3. cismin kütlemerkezine uzaklığı: ",r)*

*print("rho1 değeri: ",rho1)*

*print("rho2 değeri: ",rho2)*

*print("v^2 değeri: ",v2)*

*C=2\*((mu1/rho1)+(mu2/rho2))+(w\*(x\*\*2+y\*\*2))-v2*

*print("Jacobi sabiti: ", C)*

*else:*

*print("Böyle bir nokta bulunmamaktadır.")*

*print("Lütfen bir Lagrange Noktası girişi yapınız.")*

*print("Lagrange Noktaları: L1,L2,L3,L4,L5")*

*print(50\*"-")*

***YOĞUNLUK VE KÜTLE İLE HESAPLANAN ROCHE LİMİTİ KARŞILAŞTIRMASI***

*import math*

*#Mass of the Sun*

*M=1.989E30 #kg*

*#Mass of Neptune*

*m=1.024E26 #kg*

*#GM value for Neptune*

*GM=6834257.92 #km^3 sn^-2*

*#Semi-major axis of Neptune's orbit*

*a=4495060000 #km*

*#Radius of Neptune*

*r=24622 #km*

*#Density of the Sun*

*rho\_sun=1408 #km m^-3*

*#Density of Neptune*

*rho\_nep=1638 #km m^-3*

*#Radius of the Sun*

*R=696340*

*#Roche Limit with Density*

*roche=2.423\*R\*(rho\_sun/rho\_nep)\*\*(1/3)*

*print("Roche Limiti (Yoğunluk): ",roche, "km")*

*#Minimum period calculation (in seconds unit)*

*Tmin=math.sqrt(pow(roche,3)\*((4\*pow(math.pi,2))/GM))*

*print("Minimum periyot değeri (saniye cinsinden): ",Tmin, "saniye")*

*#Minimum period in days and years unit*

*Tmin=Tmin/(60\*60\*24)*

*print("Minimum periyot değeri (gün cinsinden): ", Tmin, "gün")*

*Tmin=Tmin/365*

*print("Minimum periyot değeri (yıl cinsinden): ", Tmin, "yıl")*

*print(60\*"-")*

*#Roche Limit with Mass calculations*

*roche=r\*((3\*M/m)\*\*(1/3))*

*print("Roche Limiti (Kütle): ",roche, "km")*

*#Minimum period calculation (in seconds unit)*

*Tmin=math.sqrt(pow(roche,3)\*((4\*pow(math.pi,2))/GM))*

*print("Minimum periyot değeri (saniye cinsinden): ",Tmin, "saniye")*

*#Minimum period in days and years unit*

*Tmin=Tmin/(60\*60\*24)*

*print("Minimum periyot değeri (gün cinsinden): ", Tmin, "gün")*

*Tmin=Tmin/365*

*print("Minimum periyot değeri (yıl cinsinden): ", Tmin, "yıl")*

*print(60\*"-")*

*KOD ÇIKTISI:*

*Roche Limiti (Yoğunluk): 1604246.1649490457 km*

*Minimum periyot değeri (saniye cinsinden): 4883606.921947526 saniye*

*Minimum periyot değeri (gün cinsinden): 56.523228263281545 gün*

*Minimum periyot değeri (yıl cinsinden): 0.1548581596254289 yıl*

*------------------------------------------------------------*

*Roche Limiti (Kütle): 954571.9914476561 km*

*Minimum periyot değeri (saniye cinsinden): 2241543.736049594 saniye*

*Minimum periyot değeri (gün cinsinden): 25.943793241314744 gün*

*Minimum periyot değeri (yıl cinsinden): 0.07107888559264314 yıl*

*------------------------------------------------------------*